

Professional Paper – Stručni rad

НЕКЕ НОВИЈЕ МАТЕМАТИЧКЕ ТЕОРИЈЕ БЕЗ ФОРМУЛА

Радослав В. Милошевић

Универзитет за пословни инжењеринг и менаџмент, Деспота Стефана Лазаревића бб,
78000 Бања Лука, БиХ

АПСТРАКТ

Циљ овога рада јесте да се истакне могућност интерпретације неких новијих математичких теорија без формула. Најприје ћемо те математичке теорије (линеарне и метричке просторе, афине трансформације и групе трансформација) описати преко формула језиком савремене математике. Затим ћемо те теме објаснити без формула користећи експерименте из механике, физике и хемије као и примјере из свакодневне праксе.

Кључне ријечи: *математика без формула, простори линеарни и метрички, трансформације, групе трансформација.*

УВОД

Познато је из историје математике да су многи математички проблеми рађени описно, па чак и у стиховима и у причама (Етрурске плочице, Архимедови проблеми, те кратке приче А. П. Чехова).

Овдје ћемо се бавити проблемима из теорије савремене математике као што су линеарни и метрички простори, затим афине трансформације и групе трансформација, те ћемо их описати без уобичајених математичких формула.

Познато је у класичној математици да је *формула* сваки симболички запис, односно алгебарски израз, као и једнакост, који садржи неко тврђење, теорему или закључак. Било би добро подсјетити се какав значај и какво значење у математици имају нпр. Стирлингова, Ојлерова, Гринова, Тајлорова формула и др. На основу тога, намеће се закључак да се формулама могу изражавати и истинита и лажна тврђења. Формуле у математици помажу да се сложена расуђивања, гломазне теореме замијене кратким записом. Скоро је незамисливо да се теме савремене математике могу интерпретирати без формула, али ћемо у овом раду покушати да истакнемо и ту могућност.

Још од античких времена кориштен је *Еуклидов простор* као простор чије се својство описује аксиомима апсолутне геометрије и Еуклидовим постулатом (асиомом) о паралелним правима. Општије речено, Еуклидовим простором се назива n -димензионални метрички простор у коме је могуће увести Декартов координатни систем и онда се метрика дефинише на следећи начин: растојање између тачака M с координатама (x_1, x_2, \dots, x_n) и M' с координатама $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ израчунава се по формули:

$$\rho = MM' = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$$

Еуклидов простор је полазна основа за формирање осталих математичких простора, али и геометријских трансформација, о чему ће овдје бити ријечи. До почетка XX вијека математика се развијала у свим правцима и смјеровима, без могућности да се сагледа као једна цјеловита научна дисциплина. О математици као природној и егзактној науци први је говорио Давид Хилберт (David Hilbert), на Међународном конгресу математичара у Паризу 1900. године, постављајући је на принципима формализма дедуктивне науке. Најприје је увео

основне појмове и основне ставове, а затим изведене појмове и изведене ставове. Овдје ћемо илустровати његов приступ формирању основних појмова и ставова, а то ће нам омогућити интерпретацију савремених математичких тема без формула.

Замислите да су испред Вас сликарска четкица, плакатно перо, фломастер и танко заоштрена оловка. Коју бисте од ових алатки користили да повучете праву линију на папиру? По свему судећи, посегнућете за оловком. И то је разумљиво: сликарска четкица исписује широку црту, са неравним ивицама, мрљама од мастила, пипцима разливеним на све стране, то јест, са многобројним појединостима које немају никакве везе са правом линијом. Недостатака имају и перо и фломастер. Једино оштро зашиљена оловка на папиру не оставља траг, односно, голим оком је непримјетан.

Но, погледајте траг оловке кроз лупу: ни по чему није бољи од трага који је оставила сликарска четкица! Та иста промјенљива ширина, те исте криве ивице. Оловку је потребно замијенити савременијим инструментом. Али, гдје је такав инструмент који ће свести на нулу све небитне појединости? Размисливши трезвено, вјероватно ћете доћи до јединог закључка: такав инструмент нећеш наћи ни у једном прибору за техничко цртање. Можда би улогу таквог инструмента одиграла ријеч? Јер, кажу: линија јесте дужина без ширине. Али, шта је то дужина? Шта је то ширина? Не може ли се овдје замијенити једна дефиниција другом? Не разјашњава ли се један предмет кроз други, који, опет, треба дефинисати? Нема краја питањима. Јесмо ли се заплели у својим истраживањима? Произилази да не можемо да дамо тачну дефиницију праве. Па то је једно од основних појмова геометрије. Можемо ли да конструишемо ако не постоји прецизна дефиниција?

Обратићемо се ауторитетима у математици. Њемачки математичар Давид Хилберт у својој књизи *Основи геометрије* наводи: „Ми ћемо замишљати о разликама система елемената: елементе првог система називаћемо тачке, елементе другог система називаћемо праве, елементи трећег система називаћемо раван. Замислићемо тачке, праве и равни у одређеним корекцијама и означаваћемо те међусобне односе разним изразима као што су: лежати, између, конгруентан, паралелан, непрекидан, бесконачан.” Тачније, у математичком смислу, потпуни опис тих међусобних односа постиже се геометријским аксиомима. Те аксиоме изражавају одређене, међусобно повезане основне елементе нашег описаног огледа из искуства у свакодневној пракси.

ЛИНЕАРНИ ИЛИ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР

Линеарни простор је исто што и векторски простор, па можемо прићи његовом описивању на уобичајен начин.

Векторски простор се дефинише овако: разматра се скуп елемената било које природе, који се називају вектори. У овом скупу су утврђена правила: 1.) сваком пару елемената (x, y) из R одговара одређени трећи елемент $x + y$ из R , који се назива сума елемената x, y . Сваком елементу x из R и сваком реалном броју λ одговара одређени елемент из R , који се назива производ λ са x и означава са λx . Овај скуп ћемо назвати векторски простор ако је: 1. $x + y = y + x$; 2. $(x + y) + z = x + (y + z)$; 3. ма какви били x и y постоји вектор z такав да је $x + z = y$; 4. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; 5. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; 6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; 7. $1 \cdot x = x$.

Ако постоји из R систем елемената e_1, e_2, \dots, e_n , такав да се сваки вектор x из R може представити, и то на јединствен начин, у облику $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$, гдје су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ реални бројеви, скуп елемената који задовољавају ова својства се назива n -димензионални векторски простор, а систем e_1, e_2, \dots, e_n је његова база. Једноставан примјер векторског простора јесте скуп свих усмјерених сегмената или вектора у обичном тродимензионалном простору, с операцијом сабирања, одузимања и множења бројем дефинисаним на уобичајен начин. Као други примјер векторског простора може да послужи скуп свих полинома чији степен није већи од n . Не мијењајући суштину аксиома (1–7), може се сматрати да су $\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ елементи произвољног поља, на примјер, поља

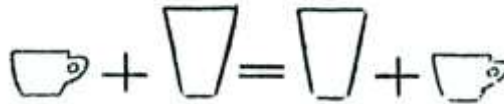
комплексних бројева. У овом случају, ријеч је о комплексном n -димензионалном векторском простору.

Лако је примјетити да својства векторског простора која смо малоприје навели представљају уопштење својстава обичног тродимензионалног векторског простора, али не и свих његових својстава. Даљим уопштавањем појмова, као што су дужина вектора, скаларни производ два вектора, може се прићи појму Еуклидовога n -димензионалног простора. Сви ови појмови и операције могу уопштити се и на случај бесконачног броја димензија о чему говоре такође Хилбертови простори и метрички простори.

Примјер 1.

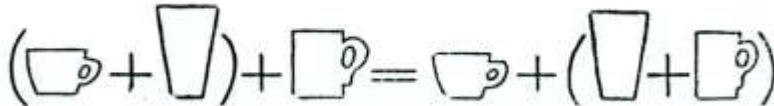
Разматрајући огледе и искуства из механике и других области физике који користе појам вектора, математика је изградила такозване аксиоме линеарног простора.

Ево једног од њих: векторе можемо слагати у било ком реду, резултат ће бити исти. На примјер, пресипајући двије посуде кафе, можемо пресути другу у прву, а можемо прву у другу. То је такозвани комутативни закон сабирања као на слици 1.



Слика 1. Комутативни закон сабирања

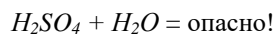
Ево другог аксиома: приликом сабирања векторе можемо удруживати на било који начин. На примјер, пресипајући три посуде кафе, можемо прво пресути прву у другу, а затим пресути их у трећу. Резултат ће опет бити исти. То је такозвани асоцијативни закон сабирања, као на слици 2.



Слика 1. Асоцијативни закон сабирања

Без сумње и један и други закон важе за елементе сваког скупа у коме је дефинисана операција сабирања.

Пређимо у лабораторију и замијенимо кафе и млијеко водом и концентрисаном сумпорном киселином. Можемо усути воду у киселину, а можемо поступати и обрнуто, сипати киселину у воду, као у сљедећим формулама:



Међутим сигурност на раду налаже управо први начин и категорички забрањује други. Ствар је у томе што се приликом смјесе концентроване супстанце киселине и воде ослобађа велика топлота, киселина почиње да ври, распршује се и пријети да опече оног ко наивно сматра да се закон комутације остварује различитим поступцима сабирања.

Према томе, у хемијској лабораторији сједињавањем реактива не остварује се прва од споменутих аксиома сабирања. Дакле, увијек се не остварује друга аксиома. Хемичари знају

на који начин припремити водени раствор кристалног јода. Јод прво треба растворити у алкохолу, а затим добијени раствор разблажити водом.

Мијењајући редосљед сабирања нећемо доћи до истог резултата: са водом јод ће формирати суспензију, која се неће претворити у раствор додавањем алкохола.

Уочавамо да аксиоми линеарног простора не важе за све елементе који се удружују по закону комутације (на примјер, код хемијских реактива).

МЕТРИЧКИ И ТОПОЛОШКИ ПРОСТОРИ

Метрика је начин дефинисања (одређивања) растојања између двије тачке (елемената) или дефинисања мјере угла у овом или оном геометријском систему.

У диференцијалној геометрији метрика се дефинише изразом за елемент дужине лука помоћу диференцијалне квадратне форме (као у Римановој геометрији).

У топологији метрика се уводи дефинисањем растојања $\varrho(x,y)$ између елемената x и y , чиме се дати скуп преводи у метрички простор.

У линеарним векторским, као и функционалним просторима, метрика се задаје скаларним производом, помоћу којег се могу дефинисати појмови растојања и угла.

Метрички простор је скуп у коме је сваком пару елемената M и M_1 , који се називају тачке простора, координиран број $\varrho(M, M_1) \geq 0$, тзв. растојање тачке M од M_1 , који задовољава следеће услове (аксиоме метричког простора): 1. (аксиома идентичности) $\varrho(M, M) = 0$ онда, и само онда, кад је $M = M_1$; 2. (аксиома симетрије) $\varrho(M, M_1) = \varrho(M_1, M)$; 3) (аксиома троугла) $\varrho(M, M_1) + \varrho(M_1, M_2) \geq \varrho(M, M_2)$.

Примјер 2.

$$\text{бројна оса } \varrho(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|;$$

Примјер 3.

n -димензионални Еуклидов простор

$$\varrho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_n^{(2)} - x_n^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(2)} - x_n^{(1)})^2};$$

Примјер 4.

Хилбертов простор

$$\varrho(M_1, M_2) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(2)} - x_n^{(1)})^2};$$

Примјер 5.

простор функција непрекидних на сегменту $[a, b]$

$$\varrho(f, g) = \max|f(x) - g(x)|;$$

Примјер 6.

простор функција чији је квадрат интеграбилан

$$\varrho(f, g) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}.$$

У овим примјерима растојање задовољава аксиоме метричког простора.

Тополошки простор је појам који у одређеном смислу уопштава појам метричког простора. Тополошки простор јесте скуп произвољних елемената који се називају тачкама тополошки простор, издваја се класа скупова који се називају отвореним скуповима или околинама (аналогно отвореним скуповима Еуклидовога простора). Околином тачке назива се произвољан отворен скуп који садржи дату тачку.

Захтјева се да произвољна унија и коначан пресјек отворених скупова буде отворен скуп. Тиме је дефинисан однос „бесконачне блискости”: тачка x је гранична за скуп M , ако свака околина тачке x садржи тачку скупа M . Самим тим је на тополошком простору могуће разматрање непрекидних функција и непрекидних пресликавања.

Тополошки простор може се дефинисати и на други начин. На примјер, помоћу операције затварања. Међутим, таква дефиниција је сувише општа и зато има мало примјена ван саме топологије. Даље сужење појма тополошког простора представљају *Хаусдорфови простори*, нормални простори и слично.

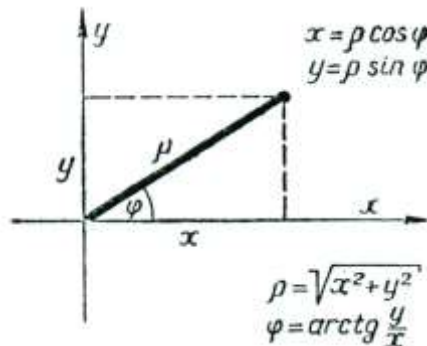
Примјери: Произвољан метрички простор јесте тополошки простор. У ствари, назовимо скуп M отвореним, ако за сваку тачку $x \in M$ постоји $\delta > 0$ такво да и свако y у које задовољава услов $\rho(x, y) < \delta$, $y \in M$. Ти скупови испуњавају горе поменуте захтјеве. Скуп цијелих бројева постаје тополошки простор ако се околина броја n дефинише као аритметичка прогресија са разликом d , узајамно простом са n .

Примјер 7.

Година 6938: Христу Богу благодарни деспот Ђурађ, господар Србљем и Поморју зетском. Наредбом Његовом сазида се овај Град (Смедерево) у години 6938. Овај натпис можете прочитати изнад главне капије града Смедерева, а можете погледати и на интернету. Наведени натпис говори о давно минулим временима. Но, то није необично јер је град Смедерево подизан као нова престоница тадашње Србије, послеје Боја на Косову, умјесто Крушевца. Али, година је 6938. По црквеном предању, вријеме се рачунало од *стварања свијета*, а то је било 5508 година прије Христа. То је број који треба одузети од датума старих љетописа приликом превођења на савремени систем рачунања времена. Дакле, $6938 - 5508 = 1430$, а то је година изградње града Смедерева по новом рачунању времена. Тек је краљ Александар Карађорђевић 1931. године ускладио вријеме рачунања са европским. Тада су године почеле да се рачунају од рођења Исуса Христа.

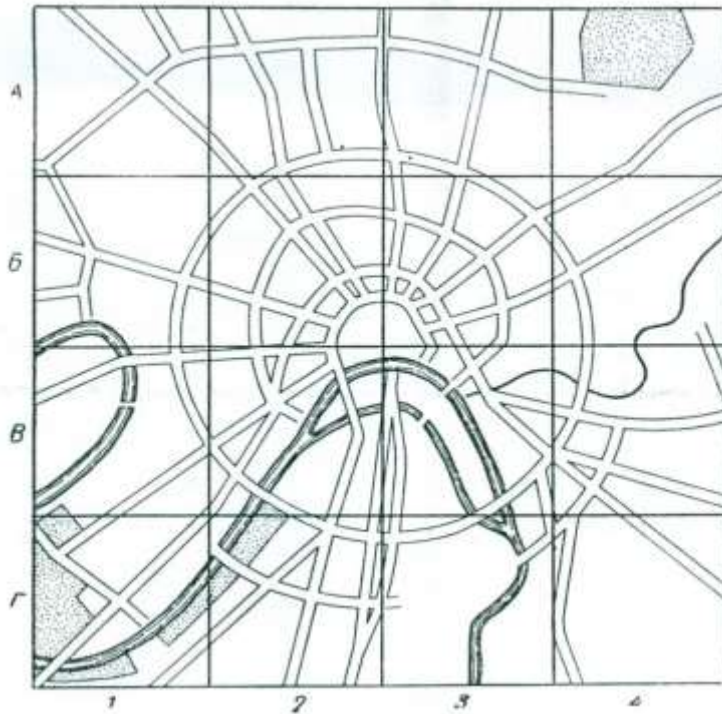
Два система савременог рачунања времена са математичке тачке гледишта су два једнодимензионална система координата који омогућавају да се оријентишемо у времену. Прерачунавање датума је прелаз из једног у други систем рачунања. Одузимањем броја 5508 изводи се формула таквог преласка.

Прелазак из једног система у други често користи физику када се захтјева опис сличних појава. Понекад се дешава да прелазимо из ваљкастог у сферни систем (слика 3), понекад из поларног у Декартов систем.



Слика 3. Прелазак из ваљкастог у сферни систем

Погледајте план већег града: преко цртежа улица налази се танка правоугаона мрежа (Слика 4). Радијуси и прстенови улица – поларни систем координата, хоризонталне и вертикалне комплементарне ознаке – Декартов. Координате било које тачке на плану могуће је одредити, како у једном, тако и у другом систему. Али, могу се одредити координате тачке само у једном од система, а формулама преласка могу се изводити координате у другом систему.



Слика 4. План неког града

Формуле преласка из димензионалног у тродимензионални систем координата далеко су компликованије него из једнодимензионалног у димензионални.

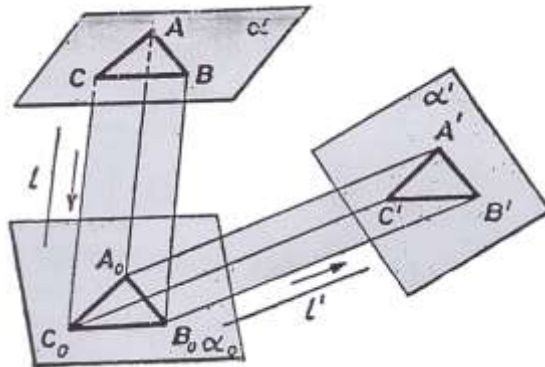
АФИНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Афина геометрија је геометрија која изучава афина својства фигура тј. таква својства фигура која остају инваријантна при афиним трансформацијама. У афиној геометрији се, у општем случају, не одржава растојање између тачака A' и B' тј. $AB \neq A'B'$. Појам растојања двије тачке уопште не припада афиној геометрији. Теореме, на примјер, о дијелењу медијана троугла тачком њиховог пресека у одређеном односу или о својству спрегнутих дијаметара елипсе јесу теореме афине геометрије, док појам висине или бисектрисе троугла нису афини. Афина геометрија се може дефинисати и као геометрија чији сви ставови проистичу из одређеног система аксиома, или као геометрија одређена (окарактерисана) групом афиних трансформација.

Афина трансформација равни α у равни α' (или равни α у исту ову равни, или простора у исти простор) јесте производ перспективно-афиних трансформација (паралелних

пројекција). Ако се тачке A, B, C, \dots равни α пројектују у правцу l у тачке A_0, B_0, C_0, \dots равни α_0 (као на слици), а тачке A_0, B_0, C_0, \dots паралелном пројекцијом у правцу l' пројектује у тачке A', B', C', \dots у равни α' , кореспондентност између равни α и α' , при којој тачкама A, B, C, \dots равни α одговарају тачке A', B', C', \dots равни α' биће афина кореспондентност. При афиној трансформацији равни, праве прелазе у праве, тачке у тачке, паралелне праве прелазе у паралелне праве, задржава се инцидентност тачака и правих, и задржава се прости однос три тачке (основна инваријанта афине трансформације). Тако ће при афиној трансформацији равни трапез прећи у трапез, квадрат у паралелограм.

Афина трансформација двије равни или равни у њу саму задаје се са три пара кореспондентних тачака $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ од којих ниједна од три тачке једне равни нису колинеарне; другим ријечима, афина трансформација равни задаје се са два недегенерисана троугла ΔABC и $\Delta A'B'C'$ (слика 5).



Слика 5. Афине трансформације

Афина трансформација образује *групу*, о чему ће касније бити више ријечи. Афина трансформација равни α у равни α' може се дефинисати аналитички као трансформација при којој су координате (x', y') тачке равни α' и тачке (x, y) равни α везане линеарним формулама.

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned} \quad \text{гдје је} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Однос површина двије фигуре при афиним трансформацијама остаје непромијењен, тј. представља инваријанту афину трансформацију; афина трансформација равни у њу саму могу да промијене или да не промијене оријентацију фигуре. Најважније афине трансформације су сажимање (контракција) равни ка правој, помјерање, хомотетија, симетрија. Тако су све трансформације које се изучавају у елементарној геометрији посебни случајеви афине трансформације. При афиној трансформацији равни елипса прелази у елипсу (у посебном случају – у круг); на овај начин су елипса и круг афино сродне фигуре (или афино једнаке). Парабола при афиној трансформацији прелази у било коју другу параболу, хипербола – у хиперболу. Тако све елипсе образују један афини тип (класу) кривих другог реда, параболе – други афини тип и хиперболе – трећи тип кривих. При афиној трансформацији крива једног афиног типа не може прећи у криву другог афиног типа. Афина трансформација се често користи као метод рјешавања геометријских задатака, при томе се дата фигура трансформише у једноставнију, на којој се изналази задато својство, па се затим врши обрнута афина трансформација и изналази тражено својство дате фигуре.

На примјер, задатак – конструисати тангенту из дате тачке M на елипсу задату паром спрегнутих дијаметара – може се ријешити тако да се један од ових дијаметара узме за ос афиног сродства и пречник круга афино сродног задатој елипси. Сада ће спрегнути дијаметри

елипсе прећи у нормалне пречнике круга; тачка M ће при изабраној трансформацији прећи у неку тачку M' . Пошто се конструише тангента на круг из M' , конструише се њој афино сродна права, а ова ће онда бити тражена тангента на елипсу.

Примјер 8.

Причало се како је једном у Александрији древни градитељ срео неког знатижељног туђинца који се зауставио испред чувеног александријског светионика и задивљено узвикнуо:

- „Како ви градите тако високе светионике?”
- „Веома једноставно”, одговорио је градитељ. „Прво ископамо дубоку јаму, а затим је изврнемо наопачке.”

Трансформацију јаме у светионик, приказану на овој слици, математичар би назвао симетријом у односу на раван или осном симетријом. Суштина термина је добро објашњена сликом: горњи и доњи дио на њој су замијенили мјеста, симетрично су се рефлектовали према хоризонталној правој која одваја небо од земље. Назваћемо ову праву осом симетрије. Слика нас увјерава у то да симетрија (у односу на раван) задржава облик фигура исто као транслација и ротација. Постоји, ипак, једна нијанса која се од њих разликује, а то је рефлексација.

Замислите да се светионици граде управо тако, како је описао градитељ – изврћањем јаме. Замислите сада да грађевинари хоће да украсе зидове светионика натписима. Како ће их стављати на зидове јаме? Стрмоглавце сигурно неће, одговорићете ви. Тако изврћути, заједно с јамом, натписи ће бити написани наопако.

Суштину таквог изненађења најлакше је схватити размотривши шта чини трансформација рефлексације са неком обичном геометријском фигуром, на примјер, троуглом којим је на слици б означен врх светионика. Обратимо пажњу, прво, на доњу половину слике и запазимо врхове троугла, рецимо, у смеру казаљке на сату. У тој досљедности примјетимо сада одговарајуће врхове рефлектованог троугла на горњој половини слике. Показаћемо да овога пута морамо ићи у смеру супротном од кретања казаљке на сату. Каже се да симетрија мијења оријентацију тијела. Супротно томе, не мијења га транслација и ротација фигура.



Слика 6. Врх светионика

ГРУПЕ ТРАНСФОРМАЦИЈА

Трансформација је кореспонденција између елемената два скупа произвољне природе таква да је сваком елементу x неког скупа X координиран потпуно одређен елемент у неког (у општем случају, другог) скупа Y . Најчешће се под појмом трансформација подразумева узајамно једнозначна кореспонденција између елемената x и $y = f(x)$ истог скупа. У геометрији је често ријеч о пункталним трансформацијама, у којим се свакој тачки неке многострукости (линије, површи, простора) кореспондира, уопште узевши, друга тачка ове многострукости, тј. пункталне трансформације су пресликавања скупа тачки (многострукости) на њега самог.

Ако је ријеч о пункталним трансформацијама у равни, оне се могу задати једнакостима:

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

гдје је тачка (x, y) праслика (оригинал), а тачка (x', y') – слика (трансформат).

Многе пункталне трансформације образују групу. Тако, на примјер, постоје: *група ротација* равни око фиксиране тачке, на примјер, око координатног почетка; *група паралелних помјерања*; *група кретања* (прве и друге врсте); *група трансформација сличности*; *група афиних трансформација* (центроафиних и еквафиних); *група пројективних трансформација*, која се састоји од свих узајамно једнозначних пункталних трансформација проширене (пројективне) равни, при којим права прелази у праву:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}, & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} &\neq 0. \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2}{ax + by + c}, \end{aligned}$$

Из ових једнакости трансформација се види да права $ax + by + c$ прелази у бесконачно далеку (несвојствену) праву.

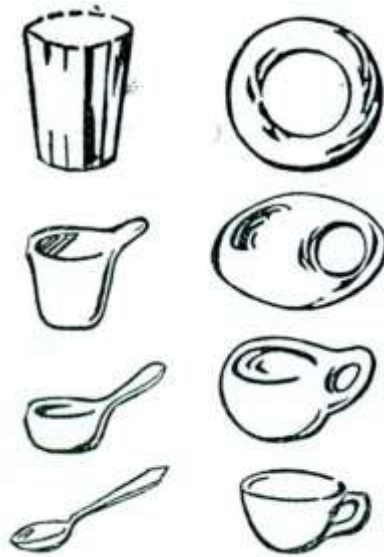
Позната је, такође, група цикличних трансформација, која се састоји из трансформација кретања, рефлексije, сличности и инверзије, и која преводи кругове и праве у кругове или у праве. За разлику од прије споменутих група трансформација (линеарних група трансформација, које преводe праве линије у праве), ове трансформације се називају бирационалним трансформацијама, тј. трансформацијама у којима су координате x и y тачке равни рационалне функције координата x' и y' одговарајуће тачке.

У геометрији се изучавају и трансформације које преводe тачке равни у праве и обрнуто, на примјер, поларна трансформација у односу на криву другог реда. Свака група трансформација одржава нека својства фигура непромјењена (инваријантна) у односу на трансформацију ове групе. На основу овога, свака група трансформација дефинише нека своја својства геометријских фигура, своју геометрију. Тако се, на примјер, изучавају метричка, афина, пројективна и друга својства фигура (Ерлангенски програм). Што је ужа група трансформација, тим више инваријантних својстава фигура она изучава, тим је богатија садржајем. А што је шира група трансформација, то она изучава мање инваријантних својстава фигура, али су ова својства дубље везана са самом фигуром. Најопштија својства фигура су тополошка својства, која су инваријантна по свим тополошким трансформацијама (узајамно једнозначним и непрекидним). У тополошка својства фигура спадају број димензија, повезаност (конвекција), оријентација.

Примјер 8.

Дозволите да вас позовем за чајни сто. Он није, истина, чајни, више је демонстрациони, и не нудим Вам да попијемо чај за овим столом него да наставимо излагање о геометријским трансформацијама. Ту су кашика и чаша. Како бисте прихватили нашу тврдњу да су с прецизношћу до неке трансформације кашика и чаша једно те исто? Хоће ли Вам то изгледати

невјероватно? А у стварности, таква трансформација постоји. На слици 7 приказани његови повезани елементи по типовима. Пажљиво погледајте: као да руке грнчара обликују мекану смјесу, претварајући једно тијело у друго, нпр. чашу у кашику.



Слика 7. Чајни – демонстрациони сто

Ту су ђеврек и шоља. Тврдимо да су и они сродни по типу. Њихова сродничка трансформација приказана је на слици. Када разгледамо слику, уочићемо да је у току трансформације окружен мали лук. Брижљиво смо га очували у тренутку највећих деформација. Намјерно смо пратили да се та петља не би прекинула или прекрила. У томе се испољава особеност свих тих трансформација о којима сада говоримо. Уз сву своју оригиналност они нису тако произвољни. Они не могу да преведу све на шта наиђу у све што пожелеле. Будући да има пуну слободу дјеловања и рада, или бисмо далеко једноставније трансформисали ђеврек у шољу. Тако бисмо га згужвали у једну грудву, затим бисмо је обликовали у једну шољу са округлом избочином, истуреним дијелом, за мали лук, и напосљетку би овај истурени дио пробушили. Али, овај пут то не дозвољавају, забрањују одређене особености тих трансформација о којима говоримо. Ова специфичност се састоји у једноставном захтјеву: ни један разрез, ни један отвор ни расцјеп, ни једно слепљивање. трансформације које допуштају овај услов називају се тополошке.

Формулисавши овај услов, ми ћемо без потешкоћа подијелити на родове, на тополошке типове све предмете на нашем столу. Рецимо, чаша ни у ком случају није сродник шољи, уколико је за трансформацију потребно пробушити удубљење. Веврек није сродник кашике, будући да се ради трансформације у кашуку удубљење на ђевреку треба прекрити, а то није допуштено према ранијем захтјеву.

Судећи по улози коју предмети имају у таквој подјели, предметима разних родова могли би се дати називи: дворучне (чајник, шећерница), једноручне (шоља, ђеврек), нултиручне (чаша, кашика, здјелица). Уосталом, у математици је већ одавно створен систем назива за подјелу тијела на тополошке типове: тијела без отвора (затворена) називају се једнострука, а једним отвором називају се двострука итд.

Умјесто закључка, циљ овога рада јесте да подстакне младе истраживаче да сами покушају без формула да опишу и друге теме из савремене математике, на сличан начин.

ЛИТЕРАТУРА

- Адамар, Ж. (1948). *Елементарная геометрия I*. Москва: Учпедгиз.
- Александров, П. С. (1948). *Введение в общую теорию множеств и функций*. Москва: Гостехиздат.
- Делоне, Б. Н.; Райков, Д. А. (1948). *Аналитическая геометрия I*. Москва: Гостехиздат.
- Еуклид (1950). *Элементы* (превод А. Билимовић). Београд: Српска академија наука.
- Ефимов, Н. В. (1953). *Высшая геометрия*. Москва – Лењинград: izdavac.
- Клейн, Ф. (1934). *Елементарная математика с точки зрения высшей*. Москва – Лењинград: izdavac.
- Клейн, Ф. (1939). *Высшая геометрия*. Москва – Лењинград: izdavac.
- Курош, А. Г. (1962). *Курс высшей алгебры*. Москва: Физматгиз.
- Мальцев, А. И. (1956). *Основы линейной алгебры*. Москва: Гостехиздат.
- Хилберт, Д. (1957). *Основы геометрии* (превод З. Гарашанин). Београд: Српска академија наука.
- Четверухин, Н. Ф. (1953). *Проективная геометрия*. Москва: Учпедгиз.

SOME NEW MATHEMATICAL THEORIES WITHOUT FORMULA

Radoslav V. Milošević

University PIM, Faculty of Economics, Trebinje, Bosnia & Herzegovina,
radoslav_milosevic@yahoo.com

ABSTRACT

The aim of this paper is to highlight the possibility of interpreting some recent mathematical theories without formulas. First, we will describe these mathematical theories (linear and metric spaces, affine transformations, and groups of transformations) via formulas in the language of modern mathematics. We will then explain these topics without formulas using experiments in mechanics, physics and chemistry, and construction as well as through examples from everyday practice.

Keywords: mathematics without formulas, spaces linear and metric, transformations, transformations.